Varianta 076

SUBIECTUL I

a) $\vec{AB}=(3-2)\vec{i}+(4-1)\vec{j}=\vec{i}+3\vec{j}$. b) $\sqrt{10}$. c) $3x-y-5=0$.

d) Fie d dreapta căutată. Din

$m_d \cdot m_{AB}=-1 \Rightarrow m_d=-\frac{1}{3} \Rightarrow (d): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x+3y-10=0.$

e) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$.

f) Fie d_1 dreapta căutată. Din

$d_1 \perp AB \Rightarrow m_{d_1} \cdot m_{AB}=-1 \Rightarrow m_{d_1}=-\frac{1}{3} \Rightarrow d_1: y-1=-\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow x+3y-5=0.$

SUBIECTUL II

1.

a) $2^x=y \Rightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow y\in\{1,2\} \Rightarrow x\in\{0,1\}$.

b) $x\circ\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}$, deci se pot considera numerele $x=\frac{5}{4}, y=\frac{1}{2}$, pentru care $\frac{5}{4}\circ\frac{1}{2}=4$.

c) $(n+2)(n+3)-6=0 \Leftrightarrow n\in\{0,-5\}$. Soluția este $n=0$.

d) 182. e) $x\in\{\hat{2},\hat{5}\}$.

2.

a) $f'(x)=3x^2-3, \forall x\in \mathbf{R}$. b) 0. c) 8. d) $x_1=1, x_2=-1$ sunt puncte de extrem local.

e) $-\frac{21}{4}$.

SUBIECTUL III

a) $I_3=A(0)\in G$. b) $\det A(0)=1$. c) $(A(2))^{-1}=A(-2)$.

d) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^{x+y}\end{pmatrix}=A(x+y).$

e) Folosind d) avem: $A(x)A(x')=I_3 \Leftrightarrow A(x+x')=A(0) \Rightarrow x'=-x\in\mathbf{R}$ care există pt orice număr real *x*. Deci, $\forall A(x)\in G, \exists A(-x)\in G$ astfel încât $A(x)A(x')=I_3$.

f) Folosind repetat d) avem

$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2007)=A(1+2+3+\ldots+2007)=A(2007\cdot 1004).$

g) Utilizăm inducția matematică. Pentru $n=1$ afirmația este adevărată. Presupunem că $A^k(x)=A(kx), k\in\mathbf{N}^*$. Atunci $A^{k+1}(x)=A^k(x)\cdot A(x)=A(kx)\cdot A(x)=A((k+1)x)$, deci afirmația este adevărată şi pentru $n=k+1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}, x\in\mathbf{R}^*$. b) $\frac{e^2}{2}-5e+\frac{17}{2}$.

c) Din a) avem că $f'(0)=0$, $f'(x)>0, x\in(2,\infty)$, deci funcția f este strict crescătoare pe $[2,\infty)$.

d) $x=2$ este punct de minim local, iar $x=-2$ este punct de maxim local.

e) Pentru $n=1$ afirmația este adevărată. Presupunem că

$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ este adevărată, $k\in\mathbf{N}^*$. Atunci

$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, adică afirmația este adevărată şi pentru $n=k+1$.

f) $(d): y-0=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow 3x+y-3=0.$

g) $-\frac{4}{3}$.